

Периодичность функции на едином государственном экзамене

В.В. Сильвестров

Планом экзаменационной работы 2008 года*) в качестве одной из задач единого государственного экзамена предусматривается задача на использование свойства периодичности функции (задача В8 в разделе заданий повышенного уровня сложности). Ниже приводятся несколько задач на указанную тему.

1. Найдите наименьшие положительные периоды следующих функций:

1) $y = 4 \cos \frac{3x}{2} - 5 \sin \frac{5x}{4}$;

2) $y = 5 \cos \frac{\pi x}{4} + \sin \frac{\pi x}{6}$;

3) $y = \pi \cos \frac{6x}{\pi} + \sin \frac{8x}{\pi}$;

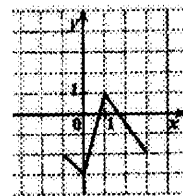
4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x + \sin \frac{x}{2}$;

5) $y = 3 \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{3x}{2} - \operatorname{ctg} 4x$;

6) $y = \cos^2 \frac{6x}{5}$.

2. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси и является периодической с периодом 4. На рисунке изображен ее график на отрезке $[-1; 3]$. Найдите значение выражения

$$\frac{f(-12)}{f(3) \cdot f(11)}$$



3. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси и является периодической с периодом 4. Найдите значение выражения $2f(-3) + \frac{f(2)}{f(25) \cdot f(14)}$, если $f(5) = 7$.

4. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси и является периодической с периодом 5. На промежутке $[-1; 4]$ значения функции $f(x)$ совпадают со значениями функции $g(x) = x(x+1)(x-4)(2x+3)$. Найдите

1) значение выражения $3f(30) - 2f(-21)$;

2) значение выражения $2f(-3) + \frac{f(11)}{g(2) \cdot f(13)}$;

3) число нулей функции $y = f(x)$ на промежутке $[-1; 8]$;

4) наименьший корень уравнения $f(x) = 0$ на луче $(4; +\infty)$;

5) число различных корней уравнения $(x^2 - x - 2)f(x) = 0$ на промежутке $[-2; 3]$;

6) наибольший отрицательный корень уравнения $\frac{f(x)}{2x^2 + 3x + 1} = 0$;

7) число корней уравнения $f(2x) = 0$ на отрезке $[-2; 8]$.

5. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси и является периодической с периодом 2π . При всех значениях x она удовлетворяет равенству $f(x + \pi) + 4f(x) = \sin x - 4$. Найдите

1) значение $f(\frac{\pi}{4})$;

2) наименьший положительный корень уравнения $f(x) = 0$;

3) число различных корней уравнения $f(x) = 2 \sin x$ на промежутке $[-\pi; 4\pi]$.

6. Найдите наименьшее положительное значение параметра a , для которого функция

1) $f(x) = \sin \frac{5ax}{6} + \cos \pi x$ будет периодической с периодом 2;

2) $f(x) = \sin \frac{5ax}{6} \cdot \cos x$ будет периодической с периодом π .

*) См сайты ФИПИ и МО РФ: <http://www.fipi.ru>
<http://ege.edu.ru>